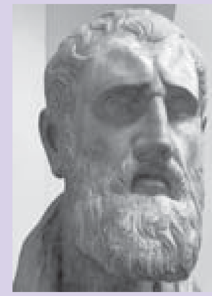
Twee paradoxen van Zeno



DE ONEINDIGHEID ONTMASKERD

[Rik Biel]

Al in de Griekse oudheid zijn allerlei wiskundige en logische paradoxen geformuleerd, die tot op de dag van vandaag blijven boeien. We bespreken hier een tweetal bekende van Zeno, de *Dichotomie* en *Achilles en de schildpad*, die op elkaar lijken en op dezelfde wijze kunnen worden ontrafeld. Menigeen kent ze en ook op school zullen ze wel eens ter sprake komen. De gebruikelijke oplossing die ik in boeken en op websites aantrof, kon mij nooit overtuigen. Jarenlang liep ik er zogezegd mee rond. De paradoxen irriteerden me. Totdat ik besloot ze nog eens onbevangen te onderzoeken en poogde ze op een toegankelijke manier te duiden. Er bleek een basale uitleg te zijn, een uitweg niet door maar langs het moeras van de verzamelingenleer. Misschien komt het u in de klas ooit van pas. Laten we eerst de twee paradoxen bekijken. Dan wordt duidelijk waarover het gaat.

De Dichotomie (tweedeling)

Achilles wil een bepaald traject afleggen. Hij staat bij de start, op de reële rechte gerepresenteerd door het punt 0, en ziet in de verte de finish liggen, corresponderend met het punt 1. Hij begint te rennen. Om bij de finish te komen zal hij toch eerst de helft van het traject moeten afleggen. Halverwege aangekomen moet hij eerst de helft van het resterende deel overbruggen om verderop te komen. Op driekwart van het traject volgt eerst de helft van het restant. Enzovoort. Zodoende loopt Achilles langs de punten 0, ½, ¾, ⅞, …, ofwel de rij (met $n \geq 0$):

(1)… $R_n = 1 - (½)^n$

Hij heeft oneindig veel punten en deeltrajecten voor zich. Hij nadert de finish tot op willekeurig korte afstand, maar hij komt daar niet aan.

Zo lijkt het althans, afgaand op de redenering. Maar ondertussen geloven we niet dat Achilles niet aankomt.

Achilles en de schildpad

Achilles heeft de reputatie de snelste atleet van Griekenland te zijn. Desondanks durft de schilpad het tegen hem op te nemen, op voorwaarde dat hij een voorsprong krijgt. Achilles stemt toe. Ze gaan op hetzelfde moment van start. Wanneer Achilles het startpunt van de schilpad heeft bereikt, dan is die ondertussen vanzelfsprekend naar een volgend punt gelopen. Als Achilles dat punt bereikt, is de schildpad wederom een stukje verder. Enzovoort. Telkens wanneer Achilles aankomt op het punt waar zijn tegenstander even tevoren was, is die alweer doorgelopen. De schildpad houdt altijd een voorsprong. Achilles haalt hem nooit in. De schildpad wint de wedstrijd.

Zo lijkt het althans, afgaand op de redenering. Maar ondertussen geloven we niet dat de schildpad wint.

De gelijkenis

De *Dichotomie* is erg overzichtelijk. *Achilles en de schildpad* lijkt op het eerste gezicht ingewikkelder. Toch zijn ze in essentie gelijk. We zullen die gelijkenis duidelijk herkennen als we de bewegingen in *Achilles en de schildpad* ontleden. We kunnen de gang van zaken inzichtelijker maken door ons voor te stellen dat de schilpad, te beginnen bij zijn startpunt, telkens een kiezelsteen laat vallen. Hij laat die vallen zodra Achilles de kiezel bereikt die als laatste is gevallen.

De posities D_n van de stenen voldoen aan:

$D_0 = 0$ (start Achilles),

$D_1 = D$ (start schildpad), en met $n > 1$ wordt voldaan aan:

(2)… $D_n - D_{n-1} = (D_{n-1} - D_{n-2}) \times s$

waarbij s = (snelheid schildpad)/(snelheid Achilles) en $0 < s < 1$.

Het verband in (2) is als volgt af te leiden. De schildpad gaat van D_{n-1} naar D_n. De afstand $D_n - D_{n-1}$ daartussen, het linkerlid van vergelijking (2), is gelijk aan de snelheid van de schildpad maal een tijdsduur.

De tijd die de schildpad krijgt, is gelijk aan de tijd die Achilles nodig heeft om van D_{n-2} naar D_{n-1} te komen.

Die tijdsduur is gelijk aan de afstand $D_{n-1} - D_{n-2}$ gedeeld door de snelheid van Achilles.

Het rechterlid van vergelijking (2) is dus $D_{n-1} - D_{n-2}$ vermenigvuldigd met het quotiënt s van de snelheden.

Betrekking (2) zegt in feite dat de onderlinge afstand tussen de punten D_n iedere keer afneemt met een factor s. Rekenend vanaf het begin is de afstand tussen twee opeenvolgende punten:

(3)… $D_n - D_{n-1} = D \times s^{n-1}$

Optellen van de onderlinge afstanden (3) geeft als oplossing voor D_n:

(4)… $D_n = D \times (1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1})$

Uitdrukking (4) bevat de partiële som van een meetkundige rij, waarvoor, met $s \neq 1$, een bekende formule geldt (ga na):

(5)… $1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1} = (1 - s^n)/(1 - s)$

Definiëren we:

(6)… $X = D/(1 - s)$

dan wordt formule (4), met $n \geq 0$:

(7)… $D_n = X \times (1 - s^n)$

Voor grote n gaat s^n naar 0 als $|s| < 1$.

Daarom gaat D_n naar X, en volgt uit (5) de som van een meetkundige rij:

(8)… $1 + s + s^2 + \ldots + s^n + \ldots = 1/(1 - s)$

Vergelijken we formule (1), $R_n = 1 - (½)^n$, met (7), $D_n = X \times (1 - s^n)$, dan blijkt dat de rijen R_n en D_n een grote gelijkenis vertonen.

Voor $s = ½$, het geval dat Achilles twee keer zo snel is als de schildpad, is de verdeling van de punten R_n en D_n zelfs identiek, afgezien van een schalingsfactor $X|_{s=½} = 2D$, volgens definitie (6). Achilles loopt in de *Dichotomie* langs de punten R_n richting 1. Achilles en de schildpad lopen in hun race elk voor zich langs de punten D_n richting het punt X.

We zien dat de twee paradoxen in wezen overeenkomen.

Het probleem

Beide paradoxen vertellen een verhaal met een onzinnige afloop, zoveel is duidelijk.

Om de *Dichotomie* 'op te lossen' wordt vaak opgemerkt dat de limiet van de totale lengte van de deeltrajecten gelijk is aan 1 (dit is eenvoudig in te zien en volgt ook uit (8)):

(9)… $½ + ¼ + ⅛ + \ldots + (½)^n + \ldots = 1$

De berekening van deze limiet van de lengte voegt overigens niets toe aan wat we al wisten, namelijk dat het punt 1 de limiet is van de rij punten $R_n = 1 - (½)^n$.

Uit (9), een oneindige som met een eindige waarde, zou volgen dat Achilles wel degelijk aankomt op het eindpunt 1 van het traject. In veel artikelen wordt de kwestie zo afgedaan. Maar is deze limietbeschouwing wel een afdoende verklaring? Rechtvaardigt de constatering van de limietwaarde de conclusie dat Achilles de eindstreep bereikt? Er is geen laatste deeltraject dat precies op de finish uitkomt. Dus hoe arriveert hij bij zijn doel? Mij heeft het gebruikelijke verhaal van de limiet nooit overtuigd. Voor *Achilles en de schildpad* kunnen we eenzelfde limietbeschouwing houden, die net zo min een bevredigende uitleg vormt. Blijft dus de vraag wat er aan de hand is. Beide paradoxen vertellen een verhaal met een onzinnige afloop, maar het is lastig aan te geven wat er aan de redenering niet klopt.

De uitleg

Om vat te krijgen op de paradoxen kiezen we als uitgangspunt dat iemand in staat is een afstand af te leggen tussen twee punten. Op de reële rechte representeren we dat met een begrensd en gesloten interval, ofwel een segment. Het segment $[a,b]$ bijvoorbeeld stelt het traject voor van het punt a naar het punt b ($a < b$). Het zal straks van wezenlijk belang blijken te zijn dat de randpunten a en b zijn inbegrepen en dat we het dus hebben over het gesloten interval $[a,b]$, en niet over een (half)open interval (a,b), $[a,b)$ of $(a,b]$. Interpreteren we de *Dichotomie* in termen van achtereenvolgende segmenten, dan wordt de beweging van Achilles beschreven door het pad:

$[0, ½], [½, ¾], [¾, ⅞], \ldots, [R_n, R_{n+1}], \ldots$

Ook al verloopt de beweging vloeiend, op het niveau van de beschrijving zijn de segmenten bepalend. Alle gesloten intervallen $I_n = [R_n, R_{n+1}]$ samen vormen het halfopen interval $[0,1)$. Immers, elke I_n valt binnen $[0,1)$, en omgekeerd ligt elk punt van $[0,1)$ in een zekere I_n. Deze vergelijking kan niet worden doorgetrokken naar het gesloten interval $[0,1]$, want geen enkele I_n bevat het punt 1. We hebben nu een belangrijk verschil boven tafel gekregen. De *Dichotomie* bestrijkt slechts $[0,1)$, en niet het gehele traject $[0,1]$:

$[0, ½], [½, ¾], [¾, ⅞], \ldots, [R_n, R_{n+1}], \ldots = [0,1) \neq [0,1]$

Oneindig veel stappen … doel onbereikbaar …

De 'truc' van de *Dichotomie* is de beperking tot $[0,1)$. Zeno suggereert dat het traject $[0,1]$ kan worden opgesplitst in oneindig veel delen, maar in zijn constructie met de rij R_n is het eindpunt 1 buiten beschouwing komen te liggen. De voorgestelde gang van zaken beperkt zich in feite tot het gedeelte voor het einde, en zegt niets over het einde zelf. De finish is buiten bereik, bestaat in de beschrijving eenvoudigweg niet. Betrekken we het tijdsverloop erbij, dan is ook dat slechts op een halfopen interval gedefinieerd.
Juist op het moment dat Achilles de finish zou passeren, lost de definitie van zijn beweging op in het niets. De paradox spreekt zich niet uit over wat er daarna gebeurt. Merk op dat Achilles op elk punt van $[0,1)$ slechts eindig veel deeltrajecten heeft afgelegd. De kwestie – in sommige artikelen opgeworpen – dat hij op de finish oneindig veel deeltrajecten zou hebben afgelegd, is niet aan de orde. Hij komt immers niet op de finish.

Eindig veel stappen … geen paradox …

Wat kunnen we zeggen over $[0,1]$, het gehele traject inclusief de finish? Het is triviaal dat er verdelingen in eindig veel aaneensluitende gesloten intervallen zijn, bijvoorbeeld het pad: $[0, ½], [½, ¾], [¾, ⅞], \ldots, [R_{100}, 1] = [0,1]$, met $R_{100} = 1 - (½)^{100}$.
De volgende vraag is of $[0,1]$ ook in oneindig veel segmenten kan worden opgedeeld. Nee, luidt het wellicht verrassende antwoord. De lezer mag proberen een oneindige opdeling te vinden, maar dat zal niet lukken. Voor een wiskundig bewijs is natuurlijk meer nodig dan dat tot nu toe niemand een oplossing heeft gevonden.
Er moet worden bewezen dat het hoe dan ook niet kan, op geen enkele manier. Dat bewijs kan worden geleverd met de theorie van de zogenoemde metrische ruimten (met het begrip compactheid en de stelling van Heine-Borel). Voor nu nemen we het aan op basis van onze visualisatie. Geen oneindigheid te bekennen dus, en ook geen paradox (wel een prikkelende vraag: merk op dat het feit dat een segment noodzakelijkerwijs uit slechts eindig veel stukken bestaat, ingrijpt op de gangbare gedachte dat een continuüm 'oneindig deelbaar' is – dus wat betekent 'oneindig deelbaar' eigenlijk precies?). De 'truc' van de *Dichotomie* is de beperking tot $[0,1)$, die volgt uit de vereniging van oneindig veel segmenten, terwijl het volledige traject $[0,1]$ alleen verdelingen in eindig veel aaneensluitende gesloten intervallen toelaat.

Achilles en de schildpad maakt het nog bonter. Het scenario richt zich alleen op het gedeelte waar de schildpad voorop loopt, en laat het inhalen en uitlopen door Achilles al bij voorbaat weg. De uitleg is analoog. Het beschouwde deel $[0, X)$ kan worden gezien als aaneenschakeling van oneindig veel segmenten $[D_n, D_{n+1}]$:

$[0, D], [D, D_2], [D_2, D_3], \ldots, [D_n, D_{n+1}], \ldots = [0, X) \neq [0, X]$

maar voor het eigenlijke traject $[0, X]$ is een verdeling in oneindig veel stukken niet mogelijk.

De kern

Wat is de kern van de zaak? In onze voorstelling van de werkelijkheid haalt Achilles de finish, respectievelijk haalt hij de schildpad in; in de formuleringen met het oneindig aantal stappen niet. Op basis van de rijen R_n en D_n zijn de uitkomsten van de paradoxen geldig. De rijen omvatten echter niet de hele situatie. Ze schieten letterlijk tekort. Een eindige beschrijving daarentegen volstaat en heeft niets geheimzinnigs. De moraal van het verhaal is dat het een andere kijk op de zaak vergt om de verwarring te verdrijven.

Literatuur

Boeken met beschouwingen over de paradoxen van Zeno:

- Marilyn vos Savant (1993): *The world's most famous math problem*. New York: St. Martin's Press. Een beknopt boekje over het bewijs van de laatste stelling van Fermat en andere wiskundige mysteries.
- Wesley C. Salmon (ed.): *Zeno's paradoxes*. Indianapolis: Hackett Publishing Company; reprint 2001. Een standaardwerk met bijdragen van verschillende auteurs.
- Michael Clark (2002): *Paradoxes from A to Z*. Londen: Routledge. Een overzicht van filosofische paradoxen met korte analyses.
- Joseph Mazur (2007): *The motion paradox - the 2,500-year-old puzzle behind all the mysteries of time and space*. New York: Dutton Adult (Penguin). Een populariserende verhandeling die de paradoxen in een brede wiskundige en natuurkundige context plaatst.

Boeken met de theorie van metrische ruimten:

- Gerald A. Edgar (1990): *Measure, topology, and fractal geometry*. New York: Springer-Verlag; Undergraduate Texts in Mathematics. Behandelt een aantal basisbegrippen als ondergrond voor de studie van fractals.
- Wilson A. Sutherland (1975): *Introduction to metric & topological spaces*. Oxford: Oxford University Press; 2nd edition, 2009. Geeft een uitgebreide behandeling.

Over de auteur

Rik Biel (1965) heeft wiskunde gestudeerd aan de Rijksuniversiteit Groningen, afstudeerrichting Technische Mechanica, gevolgd door de ontwerpersopleiding Computational Mechanics. Hij heeft een loopbaan als project- en lijnmanager in het bedrijfsleven en is geïnteresseerd in de grondslagen van de wiskunde.