

Je kent misschien de paradox van de Griekse held Achilles die dapper doorloopt maar nooit op zijn bestemming lijkt aan te komen, en de paradox van Achilles en de schildpad waarin hij het langzame dier een voorsprong gunt, maar het vervolgens niet meer lijkt te kunnen inhalen. Hier vertellen we een fabel over nog weer een andere worsteling met het begrip oneindig: Brunhilde en de egel.

■ door Rik Biel

BRUNHILDE EN DE EGEL



20

De egel daagt de sportieve Brunhilde uit het Nibelungenlied uit tot een hardloophwedstrijd. Hij noemt de regels op. Ze zullen tegelijkertijd vertrekken vanaf het punt $(1, 0)$ op de x -as. Hun doel is de oorsprong $(0, 0)$. De egel mag over de x -as lopen. De weg die Brunhilde zal moeten afleggen, is de grafiek van de functie

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

voor $0 < x \leq 1$ (en verder definiëren we $f(0) = 0$).

Brunhilde heeft op school geleerd functies te onderzoeken en grafieken te tekenen. Ze ziet in dat deze sinusachtige kromme slingerend richting het doel gaat (zie figuur 1). De uitwijkingen $|f(x)|$ worden gaandeweg kleiner. Dit volgt uit de schatting

$$|f(x)| = \left|x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq x.$$

Haar pad is vanzelfsprekend langer dan de rechte lijn van de egel. Zij kan daarentegen veel sneller lopen dan hij. Ze stemt vol zelfvertrouwen toe. Wie zal er winnen?

DE WEDSTRIJD Ze gaan van start. De egel loopt in zijn eigen tempo. Hij zal het doel zonder problemen bereiken. Of toch niet? Het pad van Brunhilde slingert oneindig vaak heen en weer en snijdt de x -as in de punten waar $f(x) = 0$, ofwel $\sin(\pi/x) = 0$, dus in de punten $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Als de egel voor zich uit kijkt en de snijpunten zich naar het eind toe ziet verdichten, duizelt het hem even. Telkens als hij bij een punt $\frac{1}{n}$ komt, is er weer een volgend punt $\frac{1}{n+1}$ waar hij heen moet. En die rij punten houdt nooit op en komt niet uit op het beoogde doel. Het doel lijkt onbereikbaar.

De egel weet echter best dat dat niet zo is. Het zijn alleen zijn gedachten die blijven hangen in de oneindige rij. Niets houdt hem tegen om met een eindig aantal stappen het doel te bereiken. Sterker nog, een lijnstuk inclusief begin- en eindpunt kan niet eens door oneindig veel steeds groter wordende tussenpunten in stukken van positieve lengte worden verdeeld (zie het kader op pagina 21)!

PARADOX OF NIET? De egel komt uiteindelijk waar hij wil zijn. Brunhilde is er nog niet. De egel heeft gewonnen, en hij heeft zich niet eens gehaast!

HET GESLOTEN INTERVAL VERDEELD

Stel, we willen het interval $[0, 1]$ verdelen door middel van een oneindige dalende rij tussenpunten

$$1 = x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > \dots \geq 0$$

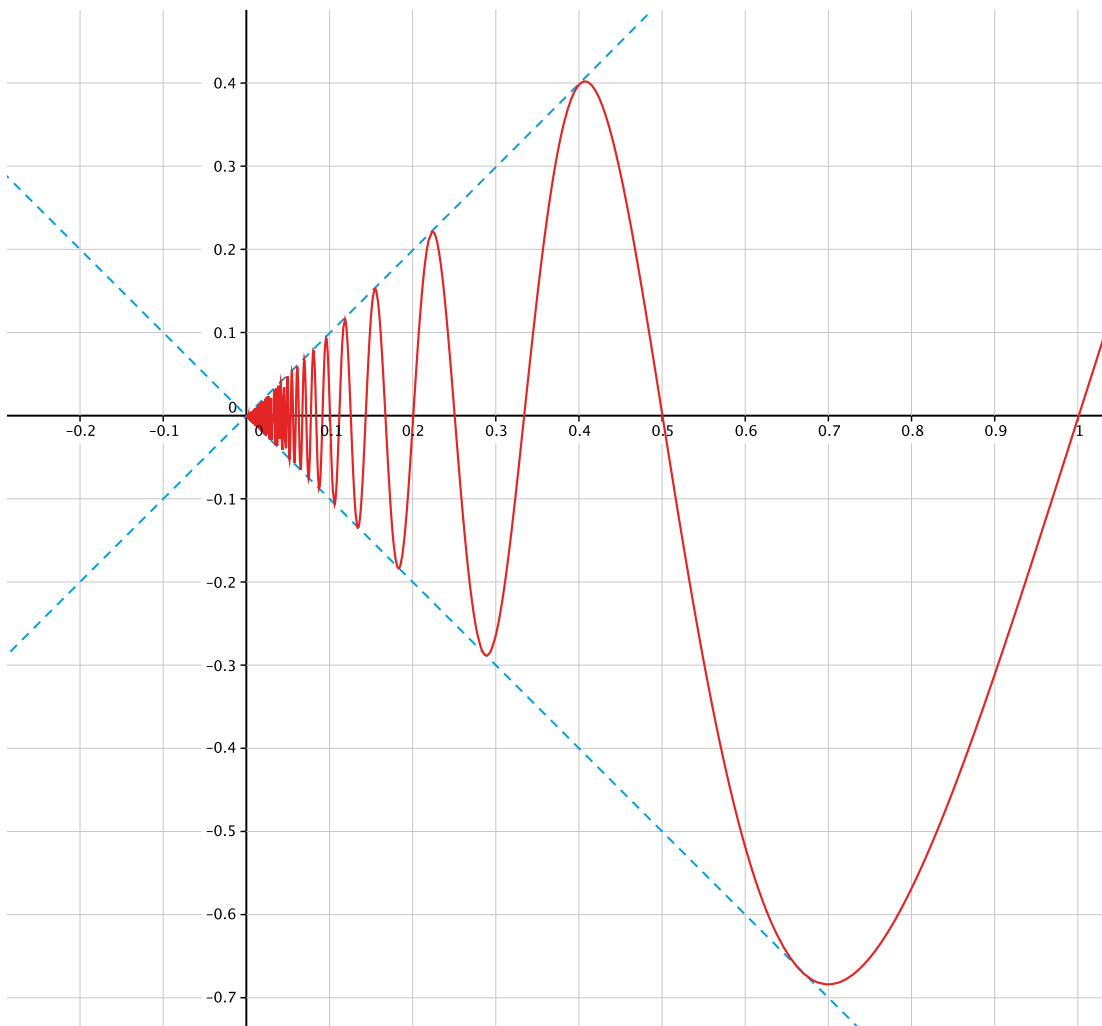
zó, dat

$$[x_2, x_1] \cup [x_3, x_2] \cup [x_4, x_3] \cup [x_5, x_4] \cup \dots = [0, 1].$$

Merk op dat geen enkele x_i gelijk is aan 0, want dan volgt $x_{i+1} < 0$.

Elk interval $[x_{i+1}, x_i]$ ligt in het interval $(0, 1]$, dus 0 ligt niet in de vereniging

$$[x_2, x_1] \cup [x_3, x_2] \cup [x_4, x_3] \cup [x_5, x_4] \cup \dots$$



Figuur 1 De grafiek van f

TWEE BEROEMDE PARADOXEN

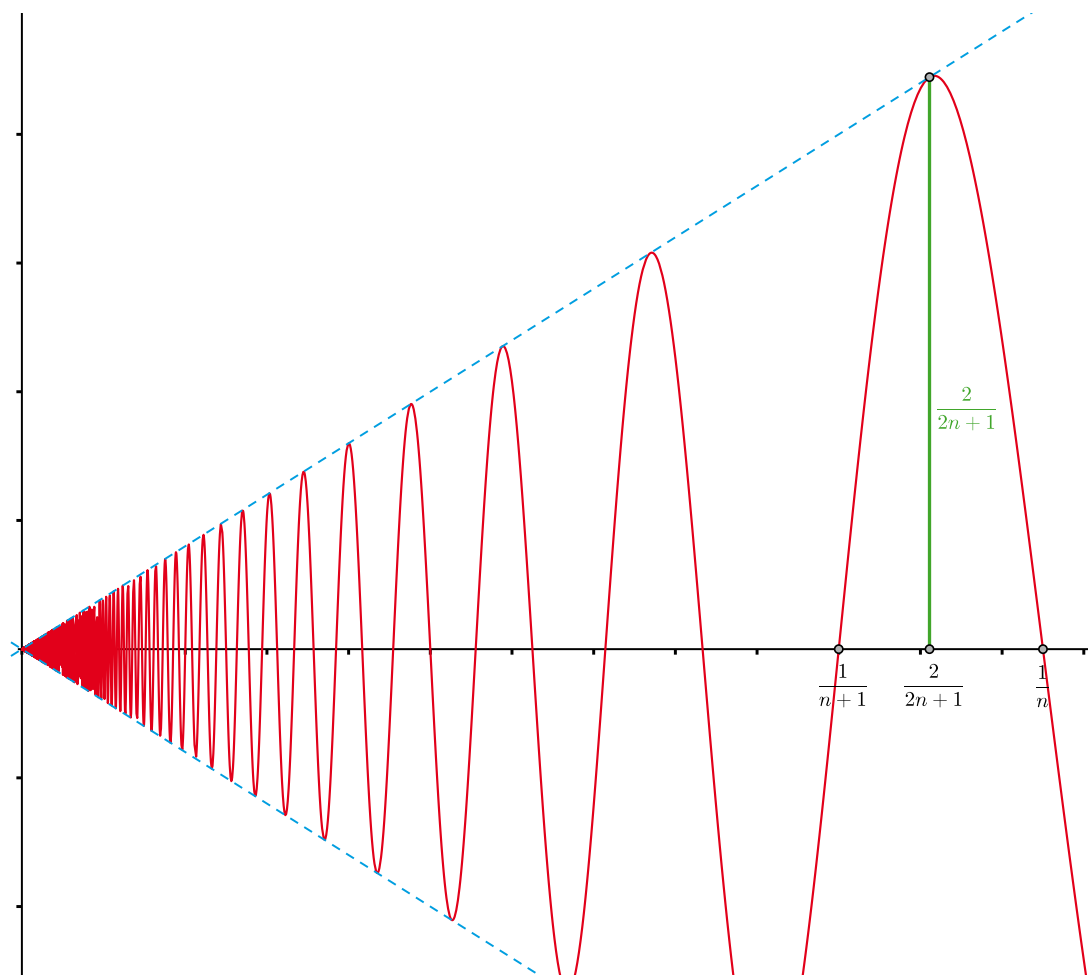
De Griek Zeno (490-430 voor Christus) heeft de volgende twee paradoxen bedacht waarmee hij ons laat nadenken over de gevolgen van het in oneindig veel stukken breken van een eindig interval.

DE PARADOX VAN DE DICHOTOMIE Achilles wil een bepaald traject afleggen. Hij staat bij de start, op de reële rechte gerepresenteerd door het punt 1, en ziet in de verte de finish liggen, corresponderend met het punt 0. Hij begint te rennen. Om bij de finish te komen zal hij toch eerst de helft van het traject moeten afleggen. Halverwege aangekomen moet hij eerst de helft van het resterende deel overbruggen om verderop te komen. Op driekwart van het traject volgt eerst de helft van het restant. Enzovoort. Zodoende loopt Achilles langs de punten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ofwel de rij

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Hij heeft oneindig veel punten en deeltrajecten voor zich. Hij nadert de finish tot op willekeurig korte afstand, maar hij komt daar niet aan. Althans, zo lijkt het, afgaand op de redenering. Ondertussen geloven we echter niet dat Achilles niet aankomt.

DE PARADOX VAN ACHILLES EN DE SCHILDPAD Achilles heeft de reputatie de snelste atleet van Griekenland te zijn. Desondanks durft de schildpad het tegen hem op te nemen, op voorwaarde dat hij een voorsprong krijgt. Achilles stemt toe. Ze gaan op hetzelfde moment van start. Wanneer Achilles het startpunt van de schildpad heeft bereikt, dan is die ondertussen vanzelfsprekend naar een volgend punt gelopen. Als Achilles dat punt bereikt, is de schildpad wederom een stukje verder. Enzovoort. Telkens wanneer Achilles aankomt op het punt waar zijn tegenstander even tevoren was, is die alweer doorgelopen. De schildpad houdt altijd een voorsprong. Achilles haalt hem nooit in. De schildpad wint de wedstrijd. Althans, zo lijkt het, afgaand op de redenering. Ondertussen geloven we echter niet dat de schildpad wint.



Figuur 2

Is er hier nu sprake van een paradox, net als bij de paradoxen van Zeno (zie het kader op pagina 22)? We zullen zien dat er hier iets heel anders aan de hand is: Brunhilde moet oneindig ver lopen!

De egel kijkt achterom en ziet Brunhilde aanstormen. Hoewel hun onderlinge afstand hemelsbreed heel klein is geworden, blijft ze doorhollen. Er komt geen eind aan. Hoe lang is het kronkelende pad eigenlijk? Terwijl ze rent, rekent hij haar het volgende voor.

Bekijk figuur 2. De boog van het ene snijpunt bij $x = \frac{1}{n}$ naar het volgende bij $x = \frac{1}{n+1}$ is langer dan de uitwijking in het tussenliggende punt $x = \frac{2}{2n+1}$. Daar is $\sin(\pi/x) = \pm 1$ en is de uitwijking

$$\left| f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \right| = \left| \frac{2}{2n+1} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right| = \frac{2}{2n+1}.$$

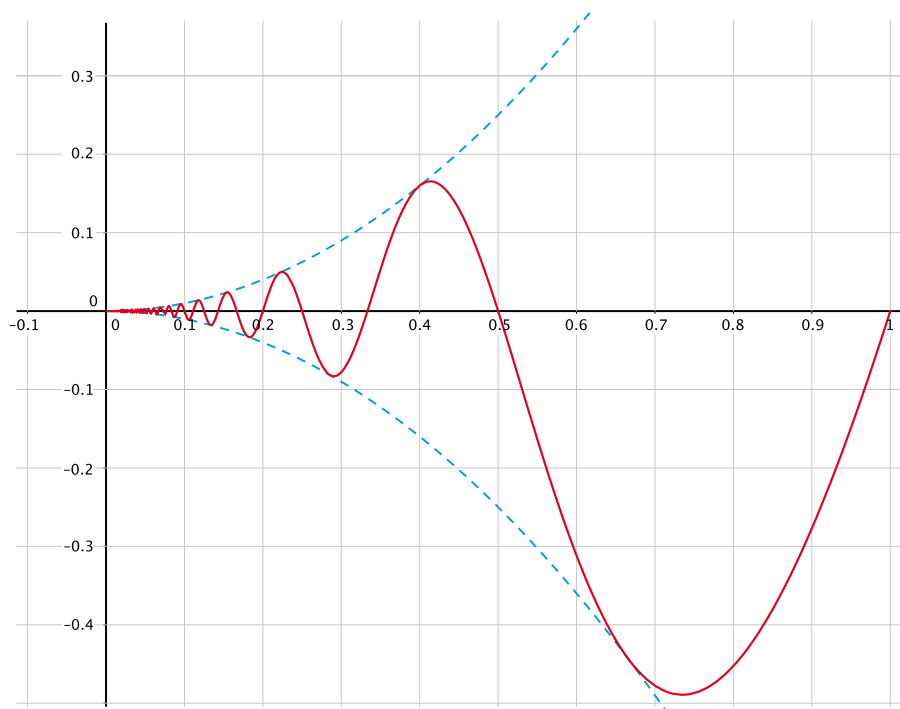
Die ene boog heeft minstens die lengte (en zelfs minstens tweemaal die lengte). Het hele pad is dus minstens zo lang als de som L van de schattingen $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \dots$

Hoe groot is L ? De egel neemt telkens meerdere termen samen en gebruikt de eenvoudige ongelijkheid $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ als $n < m$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15} + \dots \\ &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15}\right) + \dots \\ &> \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{8} + \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16}\right) + \dots \\ &> \frac{2}{4} + \left(2 \cdot \frac{2}{8}\right) + \left(4 \cdot \frac{2}{16}\right) + \left(8 \cdot \frac{2}{32}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \end{aligned}$$

Dit verklaart waarom de egel niet kan verliezen. Zijn tegenspeelster heeft een oneindig lange weg voor zich. Brunhilde loopt rood aan van verbazing en woede. Er komt voor Brunhilde inderdaad geen eind aan. Althans, als ze op haar pad blijft. Gelukkig hoeft dat niet. Bij het volgende snijpunt slaat ze af, loopt recht op de egel af en feliciteert hem.

REVANCHE Brunhilde zint op wiskundige wraak. Verhit denkt ze na. Hoe kan ze de egel te slim af zijn? Met een ander pad dat op het eerste gezicht ook oneindig lang lijkt, maar het toch niet is. Ze bezint zich op de grafiek van de volgende functie (zie figuur 3):



Figuur 3 De grafiek van g , tussen de krommen $y = x^2$ en $y = -x^2$

$$g(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

voor $0 < x \leq 1$ (en verder definiëren we $g(0) = 0$).
De functies f en g hebben veel overeenkomsten,
maar er is een wezenlijk verschil in hun afgeleiden:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

en

$$g'(x) = -\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

De eerste is onbegrensd, omdat de term $\frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
voor kleinere x steeds grotere uitschieters geeft. De
tweede is begrensd:

$$|-\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)| \leq \pi + 2.$$

Hier kan Brunhilde wel iets mee. Ze kan deze on-
gelijkheid gebruiken bij het schatten van de leng-
te van het pad: die is ten hoogste 6 (zie het onder-
staande kader). De weglengte van de egel is 1. Om
te winnen, moet Brunhilde dus 6 keer zo snel zijn
als hij. Dat gaat haar lukken. Op haar beurt daagt

zij hem nu uit.

De egel denkt even na. Hij kan de opzet van
Brunhilde wel raden en trapt er niet in. Dan stelt hij
haar een vraag. Waar denkt zij eigenlijk precies te
zijn nadat ze het pad met eindige lengte zal hebben
afgelegd? Ze antwoordt dat dat de oorsprong is.

Hij wijst haar erop dat de functie g apart gede-
finieerd is voor $x = 0$, en dat het punt eigenlijk niet
tot het pad behoort. Luchtig zegt ze dat deze defini-
tie van de functie g het probleem toch heus oplost.
Ze houdt vol dat ze toch echt uitkomt op dat punt.
Waar anders?

Hij vraagt vervolgens van welke kant ze het doel
dan wel denkt te bereiken: van rechts, van schuin
boven of schuin beneden? Er zijn namelijk oneindig
veel bochten. Die laten haar iedere keer van richting
veranderen. En hoe denkt ze dit te overleven?

Hij legt haar uit dat ze het pad kan volgen zo-
lang als het duurt, en dat er daar over het algemeen
geen gekke dingen gebeuren, behalve bij de boch-
ten. Daar moet ze steeds sneller van richting veran-
deren: de snelheid blijft begrensd, maar de versnel-
ling...

Hoe het met die twee verder gaat, laten we
open. ■

HET SCHATTEN VAN DE TOTALE LENGTE VAN HET PAD

De lengte van de grafiek van de functie g tussen $x = p$ en $x = 1$ kan worden berekend met

$$\int_p^1 \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

Omdat $|g'(x)| \leq \pi + 2$, kunnen we de lengte van de kromme schatten met

$$\begin{aligned} \int_p^1 \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx &\leq \int_p^1 \sqrt{1 + (2 + \pi)^2} dx = \\ (1 - p) \sqrt{1 + (2 + \pi)^2} &\leq (1 - p) \cdot 6 \leq 6. \end{aligned}$$

De lengte van het pad is de limiet van deze uitdrukking voor $p \rightarrow 0$ en dus ten hoogste 6.