

EEN PRIEMZEEF VAN CIRKELS

In dit artikel bekijken we een meetkundige constructie om twee positieve reële getallen te vermenigvuldigen, en zien we een leuke toepassing als 'priemzeef'.

door Rik Biel

CONSTRUCTIE

(naar een artikel van Mihai Prunescu):

Neem twee positieve reële getallen a en b . Zoals bekend gaat er door drie gegeven punten die niet op één en dezelfde rechte lijn liggen een unieke cirkel. Teken in het (x, y) -vlak de cirkel die wordt bepaald door de drie punten $(-a, 0)$, $(0, -1)$ en $(b, 0)$. Deze cirkel snijdt de positieve y -as in het punt $(0, y)$, waarbij $y = ab$ het product is van de getallen a en b .

De opgaven onderaan zullen je helpen deze bewering te bewijzen.

Stel je voor dat we de factoren a en b laten lopen over alle natuurlijke getallen groter dan 1. De y -coördinaat ab van het snijpunt van de bijbehorende cirkel met de positieve y -as bereikt dan alle samengestelde

natuurlijke getallen, die een product zijn van getallen groter dan 1, maar gaat voorbij aan de priemgetallen, die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf. De cirkels door $(-2, 0)$ en $(2, 0)$ strepen van de natuurlijke getallen op de y -as alle tweevouden weg, de cirkels door $(-3, 0)$ en $(3, 0)$ alle drievouden, enzovoort (zie figuur 1). Alleen de priemgetallen blijven over. De cirkels vormen als het ware een priemzeef, een raster dat ten opzichte van de natuurlijke getallen op de y -as gaten heeft precies bij de priemgetallen.

Er zijn overigens ook andere priemzeven bekend. Ze zijn in zekere zin complementair aan de zeef van Goldbach in het vorige nummer van Pythagoras.

OPGAVE 1

Bewijs door berekening

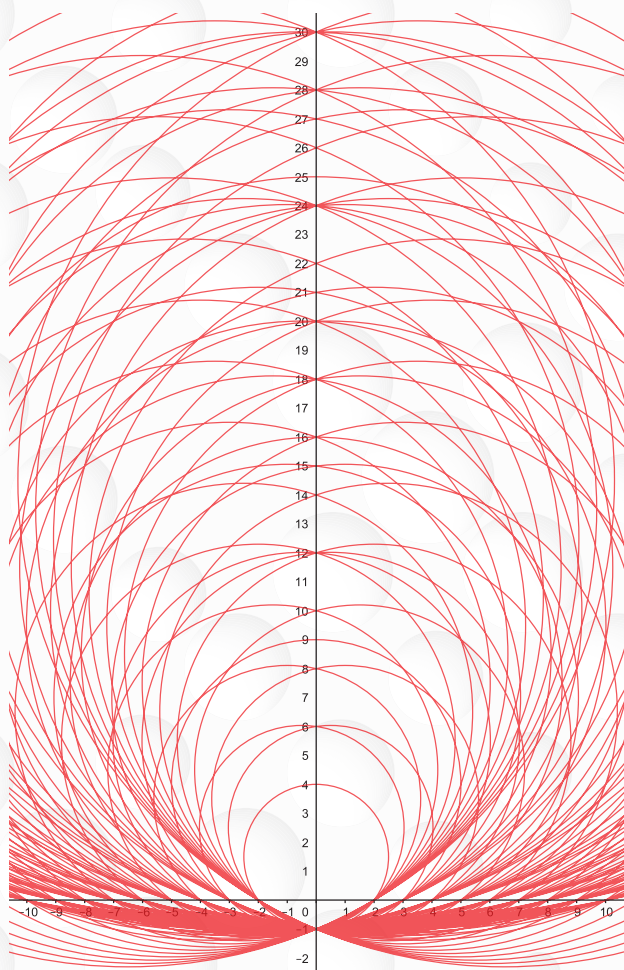
De algemene vergelijking van een cirkel in het (x, y) -vlak is $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$, waarbij (u, v) het middelpunt is en r de straal. Reken na dat de punten $(-a, 0)$, $(0, -1)$ en $(b, 0)$ de cirkel bepalen met middelpunt

$$\left(\frac{b-a}{2}, \frac{ab-1}{2} \right)$$

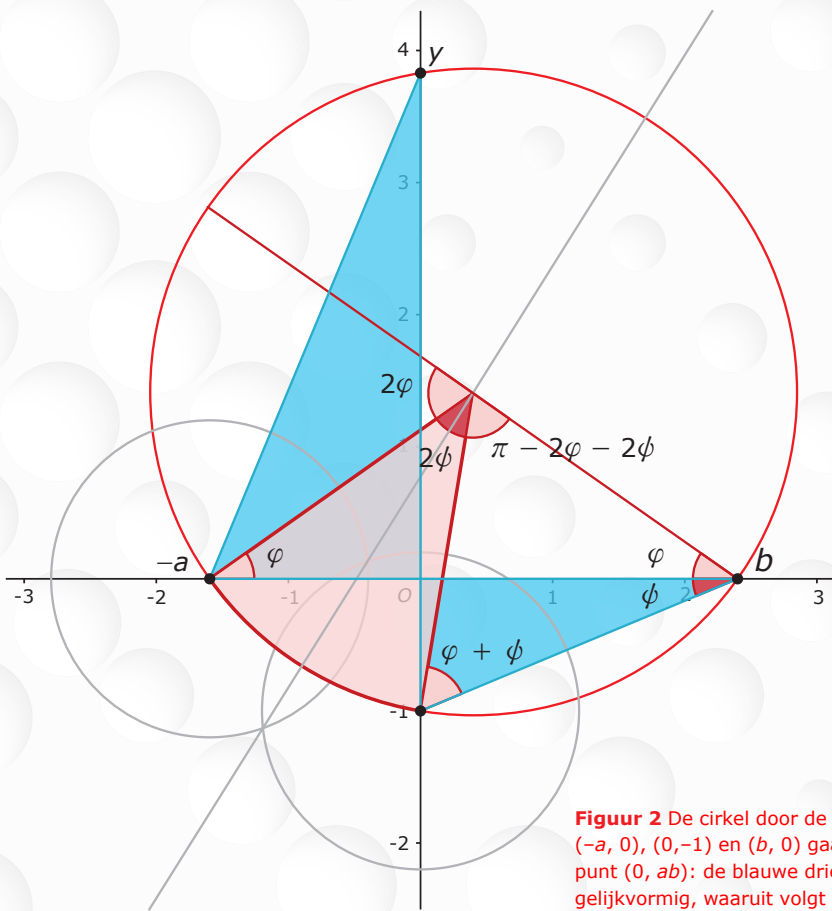
en straal

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 1} \sqrt{b^2 + 1}.$$

Het snijpunt met de positieve y -as volgt uit de vergelijking van de cirkel door $x = 0$ te stellen, maar het is eleganter goed naar de cirkel te kijken en op te merken dat dit snijpunt even ver boven het middelpunt ligt als het punt $(0, -1)$ eronder. Leid hieruit af dat $y = ab$.



Figuur 1 Priemzeef bestaande uit cirkels. De cirkel door de punten $(-a, 0)$, $(0, -1)$ en $(b, 0)$ gaat door het punt $(0, ab)$. Zijn a en b natuurlijke getallen groter dan 1, dan is ab per definitie geen priemgetal.



Figuur 2 De cirkel door de punten $(-a, 0)$, $(0, -1)$ en $(b, 0)$ gaat door het punt $(0, ab)$: de blauwe driehoeken zijn gelijkvormig, waaruit volgt dat $y = ab$.

OPGAVE 2

Bewijs met passer en liniaal

Hoe kun je met alleen een liniaal zonder schaalverdeling en een passer de cirkel door de drie punten $(-a, 0)$, $(0, -1)$ en $(b, 0)$ construeren? Figuur 2 geeft een aanwijzing. Teken twee cirkels van gelijke grootte, gecentreerd op de punten $(-a, 0)$ en $(0, -1)$. Teken vervolgens de rechte lijn bepaald door hun twee snijpunten. Herhaal deze stappen voor de twee andere tweetallen punten. Beredeneer dat de drie zo verkregen lijnen door één punt gaan, en dat dit punt tot elk van de drie gegeven punten dezelfde afstand heeft en het dus als middelpunt van een cirkel door die drie punten kan dienen. Teken deze cirkel.

We tonen aan dat de driehoek met hoekpunten $(-a, 0)$, $(0, 0)$, $(0, y)$ en de driehoek met hoekpunten $(0, -1)$,

$(0, 0)$, $(b, 0)$ gelijkvormig zijn. Ga na dat daaruit direct volgt dat $y = ab$.

De gelijkvormigheid tonen we aan door te bewijzen dat de hoeken waaronder de cirkelboog tussen $(-a, 0)$ en $(0, -1)$ wordt gezien vanuit $(b, 0)$ en vanuit $(0, y)$ gelijk zijn. Ga uit van de hoeken φ en ϕ , en leidt de andere aangegeven hoeken af; gebruik dat hoeken die samen een rechte lijn opspannen evenals de drie hoeken van een driehoek optellen tot π radialen. De conclusie is dat de omtrekshoek ϕ vanuit $(b, 0)$ op de cirkelboog gelijk is aan de helft van de middelpuntshoek op de cirkelboog. Evenzo is ook de omtrekshoek vanuit $(0, y)$ gelijk aan de halve middelpuntshoek. Daarmee is het bewijs rond.

