

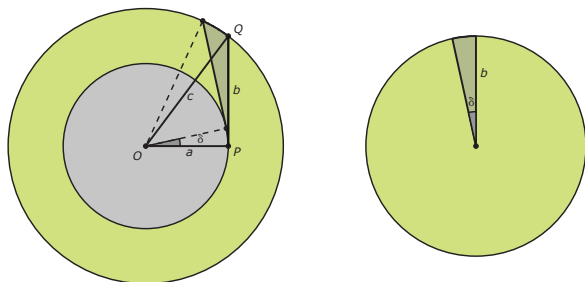
DE STELLING VAN PYTHAGORAS OP EEN BOL

De affiene meetkunde (zie *Pythagoras* 62-2) en de projectieve meetkunde (zie *Pythagoras* 62-6) stellen het zonder de begrippen afstand en hoek die andere meetkundes wel kennen. We schrijven meetkundes (meervoud), omdat er naast de 'gewone', vlakke, Euclidische meetkunde ook andere bestaan, zoals de bolmeetkunde. Dit artikel heeft de stelling van Pythagoras als onderwerp, zowel in het platte vlak als op een bol, omdat die de basis vormt van hoe hoeken en afstanden samenhangen in verschillende meetkundes. Een eenvoudig onderwerp, denk je misschien. Toch doet de hier gekozen afleiding een stevig beroep op jouw meetkundig voorstellingsvermogen. De keerzijde is dat er weinig hoeft te worden gerekend.

door **Rik Biel**

Voor de stelling van Pythagoras zijn er heel veel bewijzen (zie een zestal op de achterkanten van de 60ste jaargang van dit tijdschrift en de posters). Hier geven we de volgende afleiding.

Figuur 1 toont een rechthoekige driehoek OPQ met rechthoekszijde OP met lengte a , rechthoekszijde PQ met lengte b en schuine zijde OQ met lengte c . Draait deze eenmaal rond het punt O , dan bestrijkt de zijde OP een cirkelschijf met oppervlakte πa^2 en de zijde OQ een cirkelschijf met oppervlakte πc^2 . Het oppervlakteverschil tussen deze twee cirkelschijven, ofwel de oppervlakte van de



Figuur 1 Een draaiende driehoek OPQ en de ring bestreken door de zijde PQ . De ring en de cirkelschijf rechts hebben dezelfde oppervlakte.

ring ertussen, blijkt πb^2 te zijn. Daaruit volgt $a^2 + b^2 = c^2$, de stelling van Pythagoras voor de rechthoekige driehoek OPQ .

Dat de ring dezelfde oppervlakte heeft als een cirkelschijf met straal b is als volgt in te zien. Bij een draaiing van de driehoek over een kleine hoek δ bestaat de beweging van de zijde PQ grofweg uit een verschuiving in zijn eigen richting (omdat PQ loodrecht op OP staat) en een draaiing rond het uiteinde P over dezelfde hoek δ (omdat PQ over dezelfde hoek draait als OP). Een lijnstuk dat in zijn verlengde opschuift bestrijkt geen oppervlakte. Het draaiende lijnstuk PQ , dat lengte b heeft, bestrijkt een cirkelsector met straal b en middelpuntshoek δ . Draait de driehoek in stapjes rond, dan vormen de overeenkomende cirkelsectoren een volledige cirkelschijf. (Als deze redenering je nog niet helemaal overtuigt, lees dan ook eens het artikel *De tractrix in Pythagoras* 56-5.)

Laat ons nu eens kijken wat er gebeurt op een bol als we dezelfde redenering proberen te volgen als hierboven.

DRIEHOEKEN OP EEN BOL

Allereerst is het zaak te begrijpen hoe drie verschillende punten op een bol een driehoek bepalen. Dat is door over het boloppervlak de kortst mogelijke lijnen tussen de drie punten te trekken. De kortste verbinding is een stukje van de cirkel waarvan het middelpunt samenvalt met dat van de bol en waarvan de straal dus even lang is als die van de bol, een zogenaamde grootcirkel. Dus een boldriehoek is een deel van een boloppervlak ingesloten door drie bogen van grootcirkels.

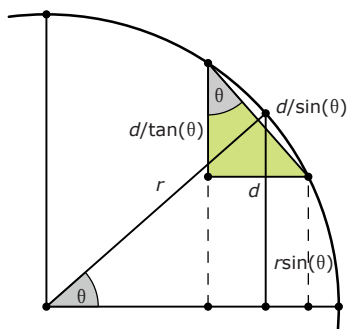
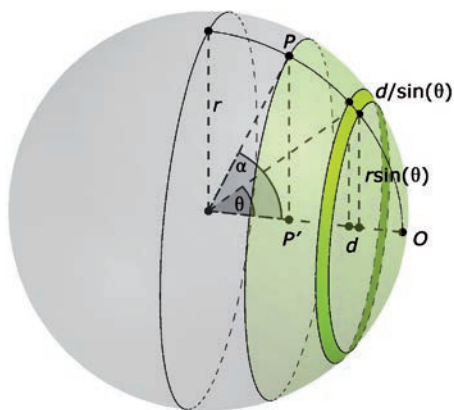
De lengte van een zijde van een boldriehoek, de boog van een grootcirkel tussen twee hoekpunten, is gelijk aan de straal maal de hoek in radialen tussen de twee stralen die de zijde opspannen. Elke andere verbindingskromme is langer.

OPGAVE 1

Teken op een bol, bijvoorbeeld een sinaasappel, een grootcirkel en overtuig jezelf ervan dat er tussen twee verschillende punten op deze cirkel geen kortere kromme bestaat.

Figuur 2 toont op een bol met straal r een driehoek met middelpuntshoeken α , β en γ , en zijden met booglengten $a = \alpha r$, $b = \beta r$ en $c = \gamma r$. Verwar de middelpuntshoeken niet met de eigenlijke hoeken van de boldriehoek, dat zijn de hoeken tussen de raaklijnen in elk hoekpunt aan de twee grootcirkels waarop de zijden liggen.

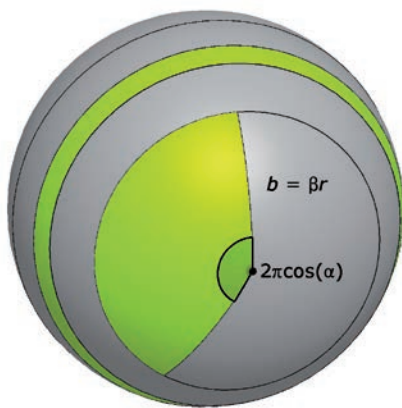
De cosinusregel en de sinusregel voor de betrekkingen tussen de groottes van de hoeken en de zijden van een willekeurige vlakke driehoek hebben hun tegenhangers in de bolmeetkunde. Zover gaat dit artikel niet, maar ze zijn gemakkelijk elders te vinden (zie bijvoorbeeld het hoofdstuk 'Platte en bolle meetkunde' in het boek *Speeltuinen van de wiskunde*). Hier gaat het alleen over driehoeken met een rechte hoek, waarvoor de stelling van Pythagoras geldt. De boldriehoek in figuur 2 is zo gekozen dat één van de hoeken een rechte hoek is. ➤



Figuur 4 Een bolkap en een uitvergroott deel van de doorsnede.

Dit is te begrijpen door te kijken naar de beweging van iemand die op de aarde op een vaste plek staat. Precies op de noord- of zuidpool draait men in een dag om de eigen as, die samenvalt met de aardas. Op de evenaar draait men in een dag in een cirkel om de aardas, maar niet om de eigen as. Op alle andere plekken draait men zowel in een cirkel als om de eigen as. Draait de boldriehoek OPQ met rechte hoek in P eenmaal over de bol rond een as door O (een van de andere hoekpunten), dan bestrijken de zijden OP en OQ elk een bolkap.

Bij een draaiing van de driehoek over een kleine hoek δ bestaat de beweging van de zijde PQ uit een verschuiving langs zichzelf en een draaiing rond een andere as door zijn uiteinde P loodrecht op de bol met hoeksnelheid $\omega \cos(\alpha)$. Daardoor draait PQ in dezelfde tijdsduur slechts over een hoek



Figuur 5 Het bolsegment uit figuur 3 en de bolkapsector hebben dezelfde oppervlakte.

$\delta \cos(\alpha)$. De bolkapsectoren die PQ stap voor stap bestrijkt en die samen een bolsegment vormen, vullen rond een punt tegen elkaar gelegd dan ook niet een gehele bolkap van 2π radialen, maar slechts een sector over $2\pi \cos(\alpha)$ radialen. Zie figuur 5.

Deze bolkapsector heeft oppervlakte $\text{Opp}_{\text{bolkap}}(r, \beta) \cdot \cos(\alpha) = 2\pi r^2 (1 - \cos(\beta)) \cdot \cos(\alpha)$.

De oppervlakten van beide bolkappen en hun verschil (het bolsegment dan wel de bolkapsector) voldoen aan $2\pi r^2 (1 - \cos(\alpha)) + 2\pi r^2 (1 - \cos(\beta)) \cdot \cos(\alpha) = 2\pi r^2 (1 - \cos(\gamma))$, te vereenvoudigen tot:

$$\cos(\gamma) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta), \text{ ofwel } \cos(c/r) = \cos(a/r) \cdot \cos(b/r).$$

Dit is het verband tussen de lengten van de zijden van een rechthoekige boldriehoek – de stelling van Pythagoras op een bol!

OPGAVE 4

Voor kleine hoeken ϕ , $0 < \phi \ll 1$, ($\phi \ll 1$ betekent " ϕ is veel kleiner dan 1") geldt: $\cos(\phi) \approx 1 - \phi^2/2$. Ga hiermee na dat voor een kleine boldriehoek ($\alpha = a/r \ll 1$, $\beta = b/r \ll 1$, $\gamma = c/r \ll 1$) de vlakke versie van de stelling van Pythagoras als benadering verschijnt.

