De complexe rekencilinder: wiskundige achtergrond

Rik Biel

In deze online bijlage bij het artikel 'De complexe rekencilinder' kijken we wat systematischer naar bewerkingen. We gaan uit van reëele getallen x met de optelling +, positieve reëele getallen r met de vermenigvuldiging ×, en reëele getallen $0 \leq \theta < 2\pi$ met als bewerking $+\text{mod}2\pi$, de optelling modulo 2π. Combinaties van deze structuren leveren de drie verschillende representaties van de complexe getallen die we hebben gezien. We sommen ze hier nog eens op, samen met hun natuurlijke bewerking (de rest van deze paragraaf behandelt de constructie van de andere bewerking):

- (a,b), waarbij a en b reëele getallen zijn, met als bewerking de componentsgewijze optelling, net als de gewone optelling genoteerd met +:

  $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$.

- (r,θ), waarbij $r > 0$ en $0 \leq \theta < 2\pi$, met de vermenigvuldiging * gedefinieerd als de paarsgewijze bewerkingen op de componenten:

  $(r,\theta) * (s,\xi) = (r \times s, (\theta + \xi)\text{mod}2\pi)$.

- (x,θ), waarbij x een reëel getal is en $0 \leq \theta < 2\pi$, met de vermenigvuldiging # gedefinieerd als:

  $(x,\theta) \# (y,\xi) = (x + y, (\theta + \xi)\text{mod}2\pi)$.

De onderlinge verbanden tussen deze structuren worden gevormd door de afbeeldingen Φ en Φ^{-1}, en de exponentiële functie en de natuurlijke logaritme. Bij de rekenliniaal is het bijzonder dat de bewerkingen + en ×, via de exponentiële functie en de natuurlijke logaritme, overeenkomen. In het algemeen vallen gegeven bewerkingen bij een gegeven 1-op-1 afbeelding niet samen. De afbeeldingen Φ en Φ^{-1} verbinden weliswaar de getallen (a,b) en (r,θ), maar voeren de bewerkingen + en * niet in elkaar over. Wel kunnen we vanuit + en * door middel van Φ en Φ^{-1} nieuwe bewerkingen '+' en '*' definiëren, met als resultaat gelijkvormige structuren. Dat doen we door de gelijkvormigheidsvergelijkingen op te vatten als eisen aan de nieuwe bewerkingen. Daaruit leiden we definities af van de 'optelling' '+' en de 'vermenigvuldiging' '*':

$$\Phi((a,b) \text{ '*' } (c,d)) = \Phi(a,b) * \Phi(c,d) \rightarrow$$

$$(a,b) \text{ '*' } (c,d) = \Phi^{-1}(\Phi(a,b) * \Phi(c,d)),$$

$$\Phi^{-1}((r,\theta) \text{ '+' } (s,\xi)) = \Phi^{-1}(r,\theta) + \Phi^{-1}(s,\xi) \rightarrow$$

$$(r,\theta) \text{ '+' } (s,\xi) = \Phi(\Phi^{-1}(r,\theta) + \Phi^{-1}(s,\xi)).$$

Voor de getallenparen (a,b) is de componentsgewijze optelling + de natuurlijke bewerking, terwijl de 'vermenigvuldiging' '*' wordt afgeleid uit de vermenigvuldiging *, de natuurlijke bewerking voor de getallenparen (r,θ). De uitkomst is de bekende uitdrukking voor de complexe vermenigvuldiging, die hier dus niet wordt geponeerd maar op een natuurlijke manier afgeleid (met toepassing van de periodiciteit en de somformules van sinus en cosinus):

(a,b) '*' (c,d)

$= \Phi^{-1}(\Phi(a,b) * \Phi(c,d))$

$= \Phi^{-1}((\sqrt{(a^2 + b^2)},\tan^{-1}(a,b)) * (\sqrt{(c^2 + d^2)},\tan^{-1}(c,d)))$

$= \Phi^{-1}(\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)},(\tan^{-1}(a,b) + \tan^{-1}(c,d))\mathrm{mod}2\pi)$

$= (\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times \cos((\tan^{-1}(a,b) + \tan^{-1}(c,d))\mathrm{mod}2\pi),\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times \sin((\tan^{-1}(a,b) + \tan^{-1}(c,d))\mathrm{mod}2\pi))$

$= (\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times \cos(\tan^{-1}(a,b) + \tan^{-1}(c,d)),\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times \sin(\tan^{-1}(a,b) + \tan^{-1}(c,d)))$

$= (\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times ((\cos(\tan^{-1}(a,b)) \times \cos(\tan^{-1}(c,d))) - (\sin(\tan^{-1}(a,b)) \times \sin(\tan^{-1}(c,d)))),\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times ((\cos(\tan^{-1}(a,b)) \times \sin(\tan^{-1}(c,d))) + (\sin(\tan^{-1}(a,b)) \times \cos(\tan^{-1}(c,d)))))$

$= (\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times ((a/\sqrt{(a^2 + b^2)} \times c/\sqrt{(c^2 + d^2)}) - (b/\sqrt{(a^2 + b^2)} \times d/\sqrt{(c^2 + d^2)})),\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(c^2 + d^2)} \times ((a/\sqrt{(a^2 + b^2)} \times d/\sqrt{(c^2 + d^2)}) + (b/\sqrt{(a^2 + b^2)} \times c/\sqrt{(c^2 + d^2)})))$

$= ((a \times c) - (b \times d),(a \times d) + (b \times c))$.

Wie nog wat wil rekenen, kan de 'optelling' '+' en de distributieve eigenschap uitschrijven:

(r,θ) '+' $(s,\xi) = \Phi(\Phi^{-1}(r,\theta) + \Phi^{-1}(s,\xi)) = \ldots = (\sqrt{(r^2 + s^2 - (2 \times r \times s \times \cos(\pi - (\theta - \xi))))},\tan^{-1}((r \times \cos(\theta)) + (s \times \cos(\xi)),(r \times \sin(\theta)) + (s \times \sin(\xi))))$;

(a,b) '*' $((c,d) + (e,f)) = ((a,b)$ '*' $(c,d)) + ((a,b)$ '*' $(e,f))$,

$(r,\theta) * ((s,\xi)$ '+' $(t,\chi)) = ((r,\theta) * (s,\xi))$ '+' $((r,\theta) * (t,\chi))$.

Tot slot van deze bijlage nog een aantal opmerkingen voor de oplettende lezer:

- Φ is niet gedefinieerd voor $(a,b) = (0,0)$. Dit is een kleine afwijking, die we kunnen verhelpen. Definiëren we $\Phi(0,0)$ op enige manier, zeg $\Phi(0,0) = O$, $\Phi^{-1}(O) = (0,0)$, dan leggen Φ en Φ^{-1} een 1-op-1 verband tussen (a,b) en (r,θ) aangevuld met O. Zoals $(0,0)$ het neutraal element is voor de optelling, zo is O dat voor de 'optelling': $(a,b) + (0,0) = (a,b)$, (r,θ) '+' O = (r,θ). Het verhaal is sluitend met de aanvullende definities: (a,b) '*' $(0,0) = (0,0)$, (r,θ) * O = O. Wie bekend is met algebraïsche structuren, herkent in dit verhaal *groepen* en *lichamen*.
- Eigenlijk hebben we in de afleiding van de vermenigvuldiging '*' de gewone vermenigvuldiging al toegepast op alle reële getallen x, niet beperkt tot positieve getallen r. We hadden als tussenstap '×' voor alle x kunnen invoeren via: $\Psi(x) = (|x|,0)$ voor $x > 0$, $\Psi(x) = (|x|,\pi)$ voor $x < 0$; $\Psi^{-1}(r,0) = r$, $\Psi^{-1}(r,\pi) = -r$. Bijvoorbeeld voor $x, y > 0$: $-x$ '×' $-y = \Psi^{-1}(\Psi(-x) * \Psi(-y)) = \Psi^{-1}((|-x|,\pi) * (|-y|,\pi)) = \Psi^{-1}(|-x| \times |-y|,(\pi + \pi)\mathrm{mod}2\pi) = \Psi^{-1}(x \times y,0) = x \times y$, ofwel "min keer min is plus"!